

Министерство образования и науки РФ

ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

УДК 519.856.3

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по науке

Кружаев В.В.

«__» _____ 2013

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

В рамках выполнения п.2.1.1.1 Плана реализации мероприятий Программы развития УрФУ на
2013 год

ПО ТЕМЕ:

Стохастические аттракторы и индуцированные шумом явления
в моделях экономической динамики
(Заключительный)

Зам.зав.кафедрой

(подпись, дата)

Елфимова Е.А.

Научный руководитель

(подпись, дата)

Ряшко Л.Б.

Исполнитель

(подпись, дата)

Рязанова Т.В.

Екатеринбург 2013

Реферат

1. ФИО автора (ов): Рязанова Татьяна Владимировна

Ryazanova Tatyana

2. Аннотация: Проект посвящен разработке математической модели стохастических аттракторов и индуцированных шумом переходов, развивает метод доверительных областей, основанный на функции стохастической чувствительности для анализа индуцированных шумом переходов и бифуркаций. Основными объектами исследования являются нелинейные модели экономической динамики (модель бизнес-циклов, модель Калдора), находящиеся под воздействием случайных возмущений различной природы и интенсивности.

The project devoted to the development of mathematical models of stochastic attractors and noise-induced transitions. It develops confident domain method based on the function of stochastic sensitivity for analysis of noise-induced transitions and bifurcations. The main objects of study are the economic dynamics of nonlinear models (model of business cycles, Kaldor's model) under the influence of random perturbations of different nature and intensity.

3. Ключевые слова: стохастическая модель Калдора, модель бизнес-циклов, случайные возмущения, функция стохастической чувствительности, доверительные области, индуцированная шумом бистабильность.

stochastic Kaldor model, business cycles model, random disturbances, stochastic sensitivity function, confident domains, noise-induced bistability.

4. Тема отчета: Стохастические аттракторы и индуцированные шумом явления в моделях экономической динамики.

Stochastic attractors and noise-induced phenomena in economical dynamic models

Оглавление

1. Введение.....	4
ЧАСТЬ 1. Модель бизнес-циклов.....	5
1.1 О модели бизнес-циклов.....	5
1.2 Анализ детерминированных модели	5
1.3 Теоретический метод усреднения Ван-дер-Поля	6
1.4 Стохастическая модель бизнес – циклов	9
ЧАСТЬ 2. Стохастическая модель Калдора.....	15
2.1 О модели Калдора.....	15
2.2 Равновесия и циклы детерминированной системы	16
2.3 Стохастические равновесия и циклы.....	18
2.4 Индуцированная шумом бистабильность модели Калдора	22
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	26
Список используемых источников.....	27
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	29
Функция стохастической чувствительности	29
Построение доверительных областей	30
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	31
Список публикаций по теме исследования.....	31

1. Введение

Параметры реальной экономической модели могут быть случайными, что можно рассматривать как стохастическую динамическую модель. Случайные возмущения являются неизбежным атрибутом любой экономической системы. Существенные изменения в динамике экономических показателей может быть вызвано даже небольшими стохастическими колебаниями. Стохастическая устойчивость динамических экономических процессов является одним из предметов современных исследований (см., например, Ким и Вонг (2011)).

Взаимодействие между нелинейностью и стохастичностью в динамических системах может генерировать различные явления, такие как индуцированные шумом переходы (Хорстхемке и Лефевр (1984)), стохастические бифуркации (Арнольд (1998)), индуцированного шумом хаоса (Gao и др. (1999)), и так далее. Стохастическая динамика активно развивающаяся область исследований экономико-математических методов. Стохастические циклы деловой активности были рассмотрены Хуанг и др. (2010), Мирча и др. (2011).

Основным инструментом для изучения стохастической динамики является прямое численное моделирование. Для параметрического анализа основных экономических вероятностных показателей (дисперсия, например) необходимы аналитические подходы. Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) дает наиболее подробное вероятностного описания стохастической динамики. Однако прямое использование этого уравнения является технически очень сложной задачей, даже для простейших возможных ситуаций. Таким образом, обычно используются асимптотические методы и приближения. Например, метод квазипотенциала, предложенный Фрейдлином и Вентцелем (1984) .

В развитие этого метода, была разработана функция стохастической чувствительности (ФСЧ), для вероятностного описания стохастических аттракторов (Башкирцева и Ряшко 2000, 2004)).

В этой работе изучаются две модели: модель Калдора и модель бизнес-циклов под действием аддитивных и параметрических случайных возмущений. Для исследования стохастических равновесий и циклов этой модели, мы используем технику ФСЧ в качестве основного аналитического инструмента .

ЧАСТЬ 1. Модель бизнес-циклов

1.1 О модели бизнес-циклов

В первой главе рассматривается модель бизнес-циклов, предложенная впервые Samuelson (1939), Hicks (1950), которые считали, что динамику капитала можно описать уравнением

$$Y_t = (1 + v - s)Y_{t-1} - vY_{t-2},$$

где Y – уровень капитала в момент времени t .

Позднее Pui и Sushko (2004) усовершенствовали модель, предложив линейно-кубическую форму для инвестиционной функции и записав уравнение

$$Z_t = aZ_{t-1} - (1 + a)Z_{t-1}^3 - bY_{t-1}$$

где $a > 0$, $v > 1$ – акселераторное число и b – постоянный уровень сбережений.

Данная модель учитывала тот факт, что правительство распределяют инвестиции в инфраструктуру не циклично, отчасти как средство борьбы с депрессией, отчасти как средство получения прибыли от более низких цен на сырье во время спада.

В работе Huang, Wang (2008) предложена непрерывная модификация этой модели под воздействием случайного шума

$$\ddot{x} + (1 - a)\dot{x} + (1 + a)\dot{x}^3 + bx = \psi(t). \quad (1)$$

В данной работе рассматривается случай $\psi(t) = \varepsilon\dot{\omega}_1 + \sigma x\dot{\omega}_2$.

Для понимания влияния случайных возмущений необходимо детальное изучение детерминированной системы.

1.2 Анализ детерминированной модели

Запишем детерминированную модель ($\sigma = 0, \varepsilon = 0$) в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(1 - a)y - (1 + a)y^3 - bx. \end{cases} \quad (2)$$

В данной системе существует одно равновесие $M(0,0)$. Классический анализ устойчивости равновесий основывается на системе первого приближения. Локальные фазовые портреты в зависимости от параметров системы представлены в бифуркационной диаграмме

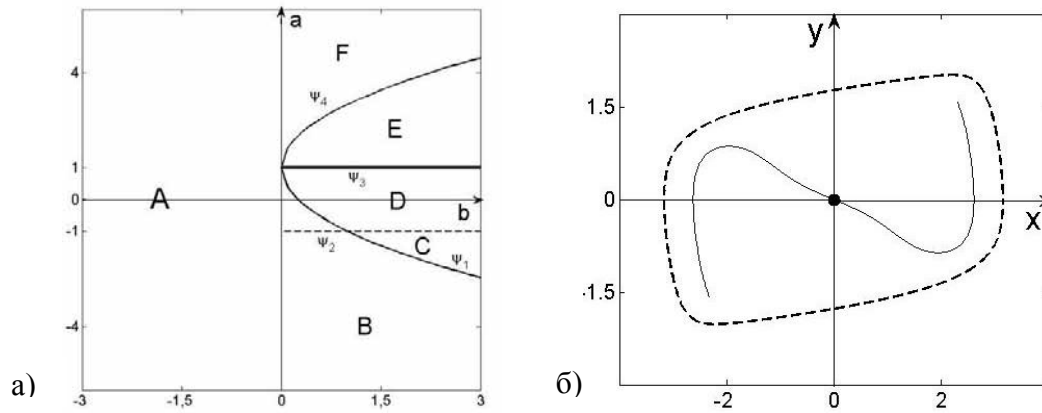


Рис.1 Бифуркационная диаграмма (а) и фазовый портрет (б) при $a = -2, b = 1$.

Здесь представлены следующие зоны: А – седло, В – сосуществование устойчивого узла и неустойчивого цикла, С – сосуществование устойчивого фокуса и неустойчивого цикла, D – устойчивый фокус, E – неустойчивый фокус, F – неустойчивый узел. Границы, разделяющие зоны, имеют следующие аналитические представления

$$\psi_1 = 1 - 2\sqrt{b}, \quad \psi_2 = -1, \quad \psi_3 = 1, \quad \psi_4 = 1 + 2\sqrt{b}.$$

Три из четырех границ были найдены при исследовании системы первого приближения. Одна граница, $\psi_2 = -1$, была получена путем численного моделирования поведения системы. Для аналитического описания данной находки использовалась теория Ван-дер-Поля (Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. (2002)).

1.3 Теоретический метод усреднения Ван-дер-Поля

Метод Ван-дер-Поля представляет собой простейший вариант метода усреднения. Он был разработан Б. Ван-дер-Полем для исследования различных автоколебательных процессов в ламповом генераторе. Применим данную теорию к модели бизнес-циклов

$$\ddot{x} + (1 - a)\dot{x} + (1 + a)x^3 + bx = 0 \quad (3)$$

Будем считать, что параметр a мал, т.е. система близка к уравнению линейного консервативного осциллятора. Вообще, близость к линейной консервативной системе является условием применимости метода Ван-дер-Поля. Это позволяет представить решение в виде

$$x = A(t)e^{it} + A^*(t)e^{-it},$$

где $A(t)$ – медленно меняющаяся функция по сравнению с e^{it} – комплексная амплитуда.

Нетрудно подсчитать, что

$$\dot{x} = \dot{A}e^{it} + iAe^{it} + \dot{A}^*e^{-it} - iA^*e^{-it}. \quad (4)$$

Отметим, что вместо одной зависимой переменной, x по сути, введены две A и A^* . Поэтому можно наложить между этими величинами дополнительную связь. Удобно потребовать, чтобы

$$\dot{A}e^{it} + \dot{A}^*e^{-it} = 0.$$

Тогда уравнение (4) упрощается:

$$\dot{x} = iAe^{it} - iA^*e^{-it}. \quad (5)$$

Продифференцируем это уравнение еще раз. Получим

$$\ddot{x} = i\dot{A}e^{it} - Ae^{it} - i\dot{A}^*e^{-it} + A^*e^{-it}.$$

С учетом соотношения (4) уравнение выше принимает вид

$$\ddot{x} = 2i\dot{A}e^{it} - Ae^{it} + A^*e^{-it}. \quad (6)$$

Подставляя выражения (5), (6) в исходную модель, после ряда вычислений приходим к следующему уравнению:

$$2i\dot{A}e^{it} - Ae^{it} + A^*e^{-it} + (1-a)(iAe^{it} - iA^*e^{-it}) + (1+a)^3(-i)(A^3e^{3it} - 3|A|^2Ae^{it} + 3|A|^2A^*e^{-it} + A^{*3}e^{-3it}) + b(Ae^{it} + A^*e^{-it}) = 0.$$

В этом уравнении все члены одного порядка малости: они либо содержат производные от медленно меняющейся амплитуды A , либо пропорциональны малому параметру. Разделим уравнение на e^{it}

$$2i\dot{A} - A + A^*e^{-2it} + (1-a)(iA - iA^*e^{-2it}) + (1+a)^3(-i)(A^3e^{2it} - 3|A|^2A + 3|A|^2A^*e^{-2it} + A^{*3}e^{-4it}) + b(A + A^*e^{-2it}) = 0. \quad (7)$$

Теперь усредним уравнение по периоду основной частоты. Операция усреднения осуществляется следующим образом:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

где T – период колебаний (в данном случае $T = 2\pi$). Поскольку $A(t)$ – медленно меняющаяся функция, при усреднении ее можно вынести за знак интеграла. Тогда, как нетрудно заметить, быстро осциллирующие члены (т.е. все члены содержащие комплексные экспоненты) в уравнении (7) дают нуль, и в результате мы приходим к уравнению

$$2i\dot{A} - A + (1-a)iA + (1+a)^3(-i)(-3|A|^2 A) + bA = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) называется *укороченным уравнением Ван-дер-Поля*. Перепишем его в виде

$$\dot{A} = -\frac{1}{2} A((1-a) + 3(1+a)^3 |A|^2 + i(1-b)).$$

Последнее слагаемое характеризует влияние фазовой нелинейности – нелинейный сдвиг частоты. Найдем решение данного уравнения, вводя вещественные амплитуду k и фазу φ ,

$A = \frac{1}{2} k e^{i\varphi}$, подставляя в уравнение получаем

$$\begin{aligned} \dot{k} &= -\frac{1}{2} k(1-a + 3(1+a)^3 k^2), \\ \dot{\varphi} &= -\frac{1}{2} (1-b). \end{aligned}$$

Умножаем уравнение на k и делаем замену $p = k^2$

$$\dot{p} = -p(1-a + 3(1+a)^3 p). \quad (9)$$

Найдем неподвижные точки уравнения (9). Во-первых, имеется неподвижная точка $p = 0$, соответствующая нулевому состоянию равновесия системы. Она устойчива при $a < 1$. Кроме того, возможно существование еще одной неподвижной точки

$$p = \frac{a-1}{3(1+a)^3}.$$

Условие существования неподвижной точки имеет вид $a < -1$ и $a > 1$, т.к. $p > 0$. Анализируя их на устойчивость можно сделать вывод, что при $a < -1$ p – неустойчиво, а при $a > 1$, p – устойчиво. Они соответствуют устойчивому и неустойчивому предельным циклам исходного уравнения. Таким образом, аналитическим методом было доказано, что когда $a < -1$ в системе существует неустойчивый предельный цикл.

Для определения зависимости устойчивости аттракторов системы от параметра необходимо найти показатель Ляпунова – для равновесия и характеристический показатель – для цикла. На Рис. 2 построена зависимость устойчивости от параметра системы.

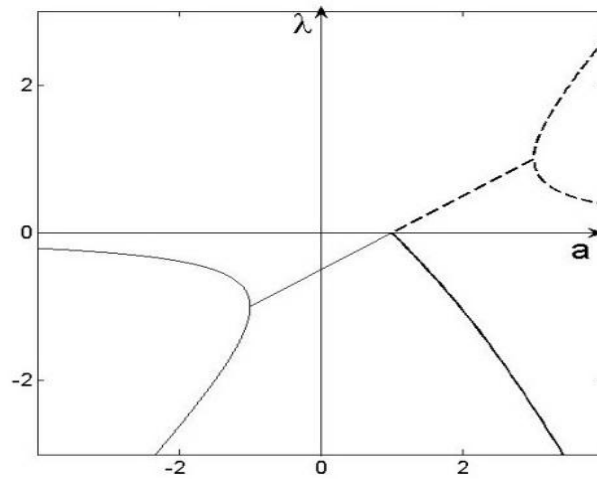


Рис. 2. Устойчивость аттракторов при $b=1$.

Здесь сплошной линией выделен характеристический показатель устойчивых равновесий, пунктиром — неустойчивых равновесий, жирной сплошной линией — устойчивого цикла. Как видно из графика, при увеличении параметра a устойчивость цикла резко увеличивается.

1.4 Стохастическая модель бизнес – циклов

Рассмотрим следующую стохастическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(1-a)y - (1+a)y^3 - bx + \varepsilon\dot{\omega}_1 + \sigma x\dot{\omega}_2, \end{cases} \quad (10)$$

где ω — стандартный винеровский процесс, моделирующий случайные внешние воздействия, ε и σ — интенсивности шума.

Под действием шума случайные траектории покидают детерминированный аттрактор и образуют вокруг него пучок случайных траекторий. Матрица вторых моментов (Башкирцева И.А. (2013)) для равновесия имеет вид:

$$W = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon^2}{(2b(a-1)+\sigma^2)} & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon^2 b}{(2b(a-1)+\sigma^2)} \end{pmatrix}$$

Каждое собственное число матрицы задает разброс (дисперсию) случайных траекторий в направлении, которое задает соответствующий ему собственный вектор. Для проверки корректности найденной матрицы проведен сравнительный анализ с эмпирической

дисперсией.

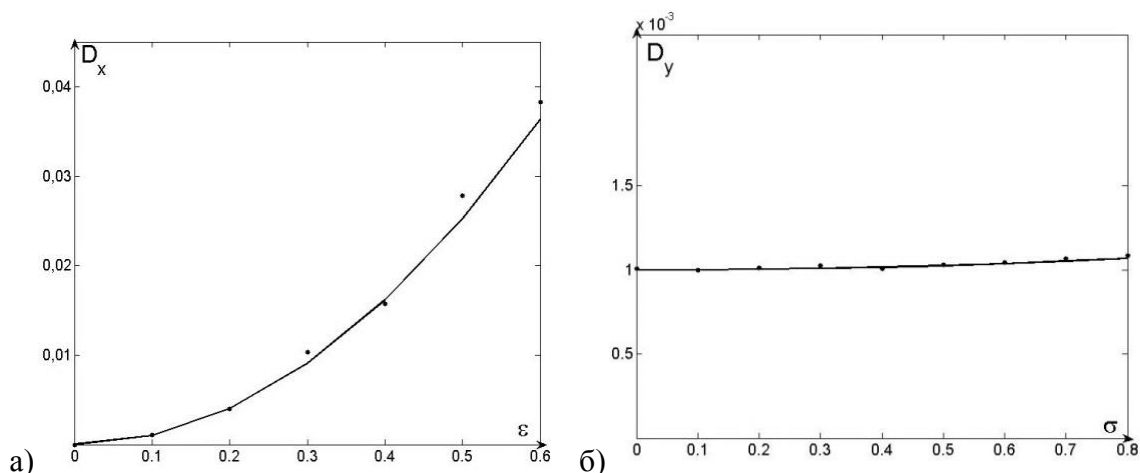


Рис.3. Теоретическая (сплошная) и эмпирическая (точки) дисперсия при $a = -3, b = 1$
 а) по оси Ox для $\sigma = 0.3$, б) по оси Oy для $\epsilon = 0.1$

Как видно на Рис.3 эмпирическая дисперсия хорошо накладывается на аналитически найденную дисперсию (элементы матрицы вторых моментов), что позволяет сделать вывод о соответствии построенной теории и эмпирических данных.

В том случае, когда в матрицу вторых моментов в явном виде не входят интенсивности шумов, ее можно назвать матрицей стохастической чувствительности. Матрица чувствительности задает отклик аттрактора, а матрица вторых моментов – дисперсию случайных воздействий. Так как теория стохастической чувствительности некорректно описывает влияние параметрического шума, нахождение матрицы вторых моментов является единственным адекватным аппаратом в теории стохастической чувствительности для анализа влияния параметрических шумов.

Для системы (10) при $\epsilon \neq 0, \sigma = 0$, матрица стохастической чувствительности записывается в виде

$$W = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2b(a-1)} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2b(a-1)} \end{pmatrix}.$$

На Рис.4а представлен график функции чувствительности равновесия в зависимости от параметра системы a при фиксированном значении $b=1$. При этом элементы матрицы W совпадают, и значит, чувствительность равновесий по оси Oy и по оси Ox будет одинаковой и эллипсом рассеивания будет окружность. Можно заметить, что при приближении параметра к

бифуркационному значению функция начинает резко возрастать. Это говорит о том, что отклонение случайных состояний от детерминированной траектории будет увеличиваться. На основе матриц стохастической чувствительности и вторых моментов возможно построение доверительных областей (Приложение1).

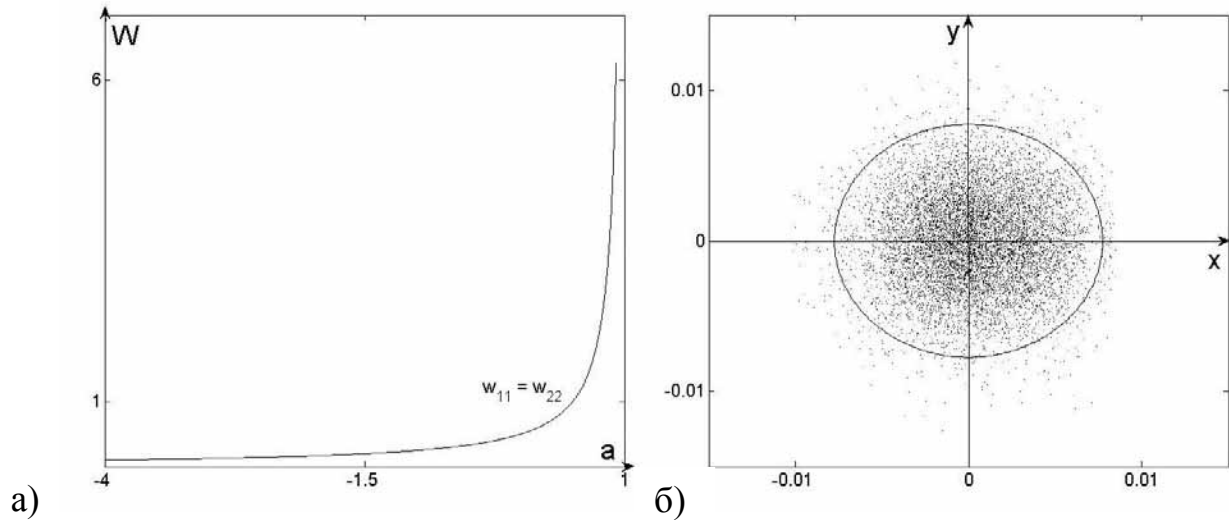


Рис. 4. Функция стохастической чувствительности при $b=1$ (а), эллипс рассеивания и случайные состояния системы для $a=-4$, $b=1$, $\sigma=0$, $\varepsilon=0.01$ (б).

На Рис.4б представлен эллипс рассеивания при $a=-4$, $b=1$, $\sigma=0$, $\varepsilon=0.01$ с доверительной вероятностью $P=0.95$. Легко заметить, что случайные состояния с данной вероятностью лежат внутри эллипса. Построение доверительных областей дает возможность предугадывать различные качественные эффекты и находить критические значения интенсивностей шумов, когда в системе возможны переходы из бассейна притяжения одного аттрактора в бассейн другого.

В случае, когда аттрактором системы является предельный цикл, численно построена функция чувствительности, как решение краевой задачи (Прил2). На Рис.5а изображена функция $m(t)$ для разных типов шумов: чувствительность для мультипликативного шума, для аддитивного шума, для аддитивного и мультипликативного шумов. На Рис. 5б (слева) изображены случайные состояния системы (10) для $a=2$, $b=1$, $\varepsilon=0.1$, $\sigma=0.1$ (соответствующие графику ξ_3), на Рис.5б (справа) для $a=2$, $b=1$, $\varepsilon=0$, $\sigma=0.1$ (соответствующие графику ξ_1).

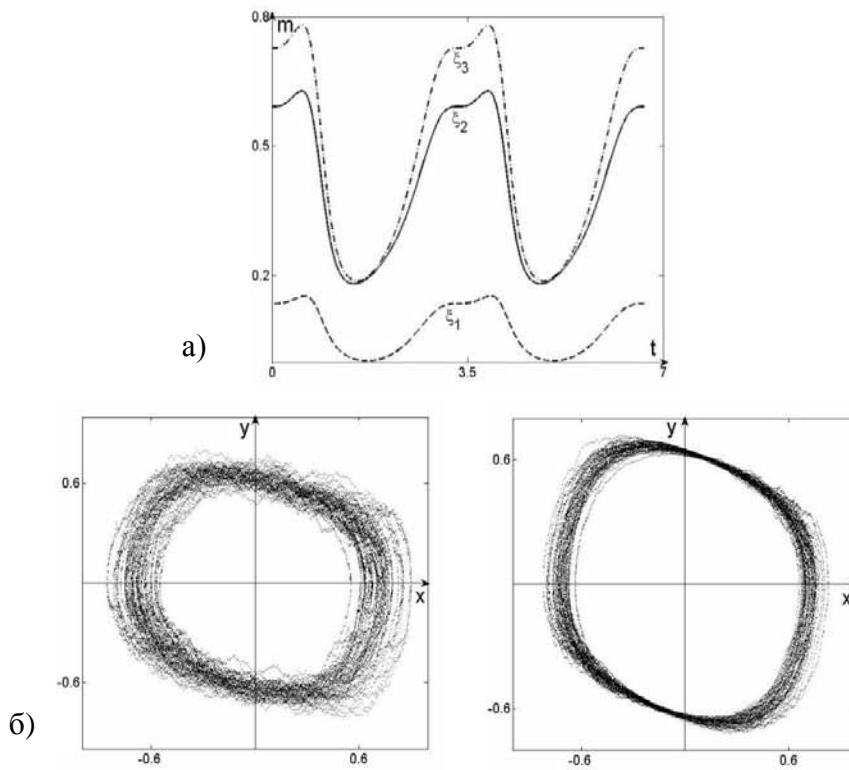


Рис. 5. Функция стохастической чувствительности цикла (а) для $a=2$, $b=1$, ξ_1 – мультипликативного шума, ξ_2 – аддитивного шума, ξ_3 – мультипликативного и аддитивного шумов и случайные состояния (б) для ξ_3 (слева), ξ_1 (справа).

Легко заметить, что график ξ_3 складывается из суммы ξ_1 и ξ_2 . Это говорит о том, что чувствительность цикла выше, когда на систему оказывают влияние как аддитивный, так и мультипликативный шум, что является вполне естественным.

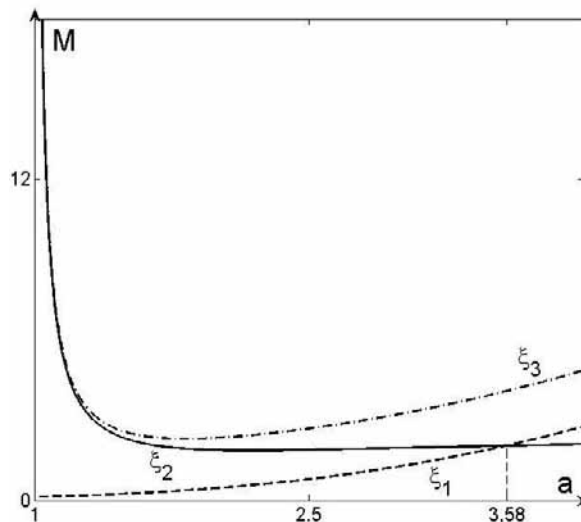


Рис.6. Коэффициенты стохастической чувствительности цикла для $b=1$.

На Рис. 6 представлен график зависимости коэффициентов чувствительности для цикла от параметра системы a . Пунктирной линией (ξ_1) изображен график для мультипликативного шума, сплошной (ξ_2) – для аддитивного шума, пунктир–точка (ξ_3) – для аддитивного и мультипликативного вместе. При увеличении параметра a устойчивость цикла резко возрастает (см. Рис.2) и это, как следствие, влечет уменьшение чувствительности цикла к случайным внешним возмущениям (ξ_2). Для кривой, отражающей коэффициент чувствительности на параметрический шум (ξ_1) картина противоположна и при увеличении параметра a , с некоторого значения график ξ_1 выше графика ξ_2 . Отсюда можно сделать вывод, что преобладающим шумом становится параметрический. Зафиксируем значения параметров $a=5$, $b=1$ и рассмотрим два случая воздействия шумов: $\varepsilon=0.05$, $\sigma=0$ и $\varepsilon=0.05$, $\sigma=0.1$.

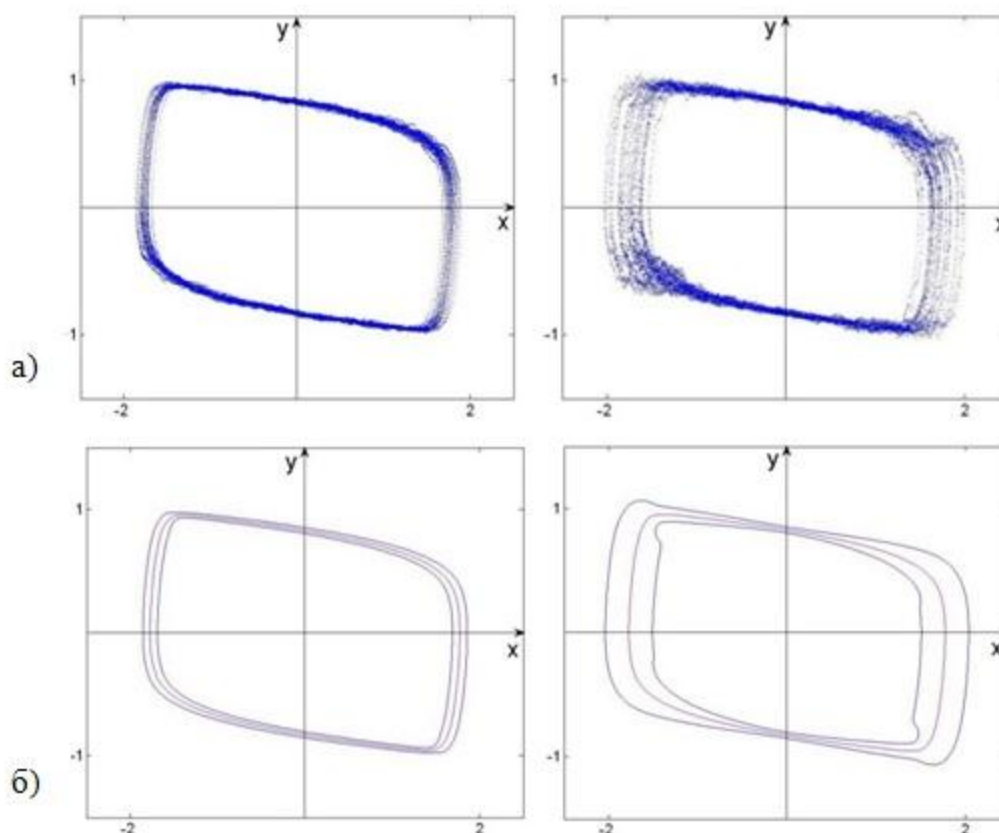


Рис.7. Случайные состояния системы (а) при $a=2$, $b=1$, $\varepsilon=0.05$, $\sigma=0$ (слева) и $\varepsilon=0.05$, $\sigma=0.1$ (справа). Доверительные полосы для соответствующих случайных состояний (б).

На Рис.7а изображены случайные состояния системы (19) при $a=2$, $b=1$ для (слева) и (справа). При значении параметра $a=5$ чувствительность цикла на аддитивный шум маленькая (Рис.6), следовательно, случайные состояния отклоняются от детерминированного цикла

недалеко, слегка размывая его (Рис.7а (слева)). Как только появляется влияние мультипликативного шума, в наиболее чувствительных зонах цикла происходит увеличение разброса случайных состояний, что приводит стохастический цикл к виду «цикл с ушами».

На Рис.7б изображены доверительные полосы для этих циклов. С вероятностью $P=0.95$ случайные состояния будут распределяться внутри полос. Глядя на Рис.7(а,б) можно заметить, что доверительные полосы должным образом описывают конфигурацию облака случайных состояний.

Важно отметить, что проведенный анализ, основанный на технике функции стохастической чувствительности, помогает не только проводить корректный анализ стохастических аттракторов, но и предугадывать различные качественные эффекты.

ЧАСТЬ 2. Стохастическая модель Калдора

2.1 О модели Калдора

Калдор (1940) представил односекторную бизнес-модель динамики системы "инвестиции-сбережения", которая может проявлять периодические колебания. Основной идеей Калдора было соединить существование периодического режима с формальным предположением об инвестиционной функции и функции сбережения. Эта идея была разработана математически Чанг и Смит (1971) на основе строгой качественной теории дифференциальных уравнений. Модель Калдора можно записать (Lorenz (1993)) в стандартной форме, как

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= \alpha(I(Y, K) - S(Y, K)), \\ \dot{K} &= I(Y, K) - \delta K.\end{aligned}\tag{11}$$

Здесь α - поправочный коэффициент на товарном рынке, δ - является нормой амортизации основных фондов. В рамках кейнсианской экономики сбережение считается пропорциональной к текущему уровню дохода

$$S(Y, K) = \gamma Y, \gamma > 0.\tag{12}$$

Основные предположения Калдора для инвестиционной функции, являются следующие.

Инвестиции положительно зависят от дохода $\left(\frac{\partial I}{\partial Y} > 0\right)$ и отрицательно $\left(\frac{\partial I}{\partial K} < 0\right)$ от капитала.

Предполагается также, что инвестиционная функция нелинейная S-образный (рис.8). Эти предположения моделируются функцией $I(Y, K) = I(Y) - \beta K, \beta > 0$. Эта простая модель обсуждалась с экономической точки зрения в работах Rodano (1997), Гандольфо (1997) и широко используется Bischi et al (2001), Krawiec and Szydłowski (2005), Kaddar and Talibi Alaoui (2009), Wu (2010,2011).

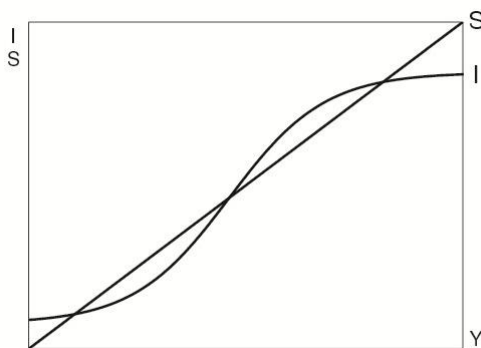


Рис. 8. Инвестиции I и сбережения S в модели Калдора.

В данной работе для моделирования S-образной инвестиционной функции $I(Y)$ используется

$$I(Y) = \frac{1}{a + \exp(-b(Y - c))} + d \quad (13)$$

с положительными параметрами $a = 1, b = 4.2, c = 1, d = 0.6$.

Таким образом, цель исследования состоит в изучении модели Калдора следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \alpha(I(Y) - \beta K - 0.5Y), \\ \dot{K} &= I(Y) - (\beta + 0.5)K \end{aligned} \quad (14)$$

при изменении параметров α и β для $\gamma = \delta = 0.5$.

2.2 Равновесия и циклы детерминированной системы

В системе (14) существует одно равновесие (\bar{Y}, \bar{K}) , координаты которого совпадают ($\bar{Y} = \bar{K}$) и не зависят от α и удовлетворяют уравнению $I(Y) = (\beta + 0.5)Y$. На рис. 9 показано, как координаты этого равновесия зависят от параметра β . Заметим, что для $\beta = 0.6$ выполняется $\bar{Y} = \bar{K} = 1$. Когда параметр β увеличивается, равновесные значения дохода и капитала снижаются.

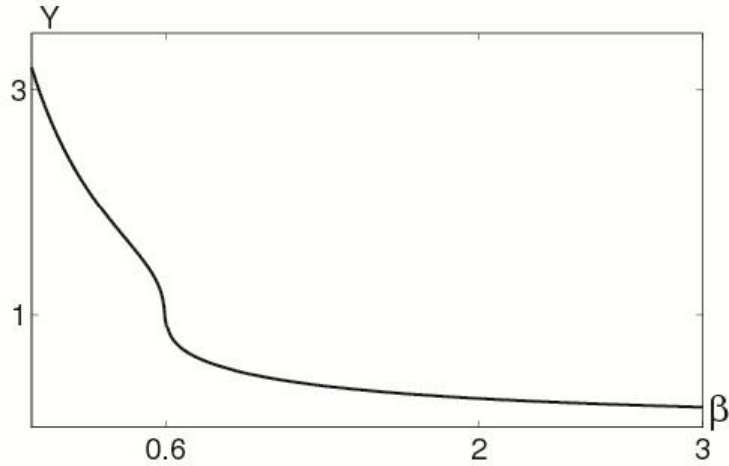


Рис. 9. Координаты равновесия $\bar{Y}(\beta) = \bar{K}(\beta)$.

Был проведен стандартный анализ устойчивости равновесия, основанный на матрице Якоби. Для системы (14), эта матрица может быть записана в виде

$$F = \begin{bmatrix} \alpha(I'_Y(\bar{Y}) - 0.5) & -\alpha\beta \\ I'_Y(\bar{Y}) & -(\beta + 0.5) \end{bmatrix}.$$

Параметрическое описание (рис.10) локальных фазовых портретов системы (14) находится из анализа уравнения

$$\lambda^2 - \text{tr}F\lambda + \det F = 0.$$

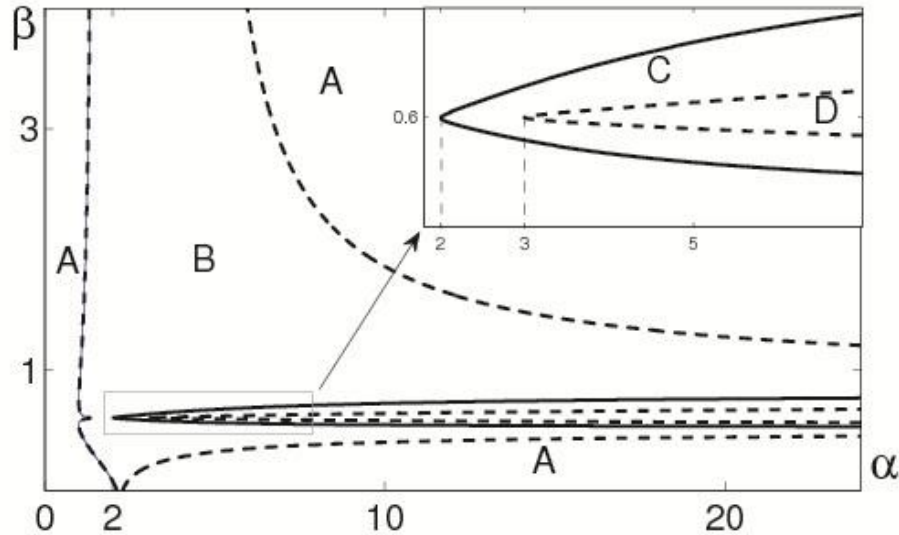


Рис.10. Бифуркационная диаграмма: *A* (устойчивый узел), *B* (устойчивый фокус), *C* (неустойчивый фокус), *D* (неустойчивый узел).

Здесь представлены следующие зоны: *A* (устойчивый узел), *B* (устойчивый фокус), *C* (неустойчивый фокус), *D* (неустойчивый узел). Сплошная линия на рис.10 отделяет зоны устойчивости равновесия и соответствует бифуркации Андронова-Хопфа.

Если $\beta = 0.6$, матрица Якоби имеет явное представление

$$F = \begin{bmatrix} 0.55\alpha & -0.6\alpha \\ 1.05 & -1.1 \end{bmatrix}.$$

Для равновесия выполняется $\text{tr}F = 0.55\alpha - 1.1 = 0$, и значит бифуркационное значение может быть найдено аналитически $\alpha_* = 2$. Зависимость показателя Ляпунова $\lambda_i(\alpha)$ от параметра показано на рис.11. При увеличении параметра α свыше бифуркационного значения $\alpha_* = 2$, показатель Ляпунова становится положительным, что влечет неустойчивость равновесия.

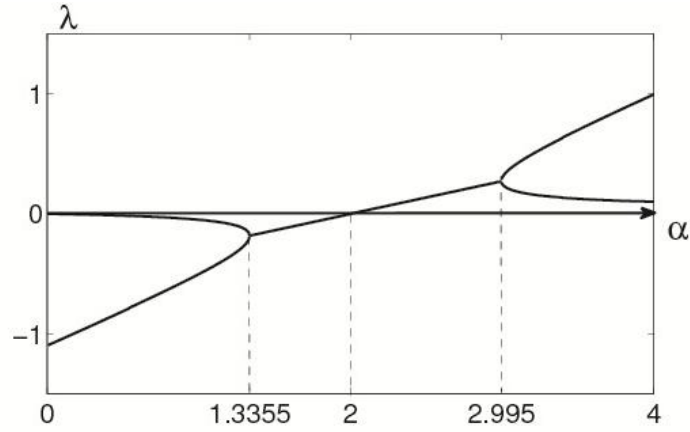


Рис. 11. Показатель Ляпунова для модели Калдора при $\beta = 0.6$.

На рис.12 показано как размер аттрактор системы (14) зависит от параметров α и β . Здесь построены экстремумы Y - координаты детерминированных аттракторов. Обратите внимание, что вблизи точек бифуркации, размер предельных циклов резко возрастает при изменении β .

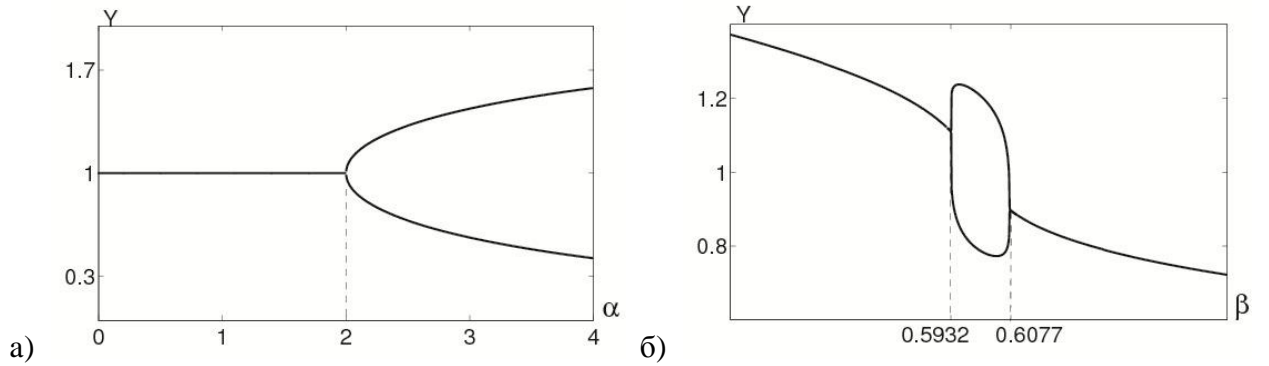


Рис. 12. Размер аттракторов модели Калдора: а) для $\beta = 0.6$; б) для $\alpha = 2.2$.

2.3 Стохастические равновесия и циклы

Для изучения реакции модели Калдора (14) на случайные возмущения, будем рассматривать следующую стохастическую систему

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= \alpha(I(Y) - \beta K - Y) - \sigma_1 \alpha K \dot{w}_1 + \sigma_2 \dot{w}_2, \\ \dot{K} &= I(Y) - (\beta + 1)K - \sigma_1 K \dot{w}_1 + \sigma_3 \dot{w}_3.\end{aligned}\tag{15}$$

Здесь w_i ($i = 1, 2, 3$) - независимые стандартные винеровские процессы с параметрами $E(w_i(t) - w_i(s)) = 0$, $E(w_i(t) - w_i(s))^2 = |t - s|$, σ_1 - интенсивность параметрического шума, σ_2, σ_3 - интенсивности аддитивных шумов. В случае стохастической модели параметрический шум вносится в параметр β в виде: $\beta \rightarrow \beta + \sigma_1 \dot{w}_1$.

Случайные траектории стохастически возмущенной модели (15) покидают детерминированный аттрактор (равновесия или цикла) и образуют вокруг него соответствующий стохастический аттрактор. Очевидно, что с увеличением интенсивности шума, дисперсия случайных состояний возрастает. В данной работе изучается, как дисперсия зависит от параметра регулировки α . Зафиксируем $\beta = 0.6$.

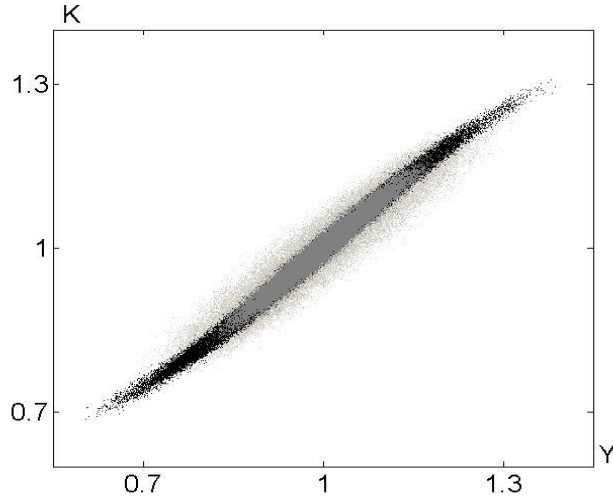


Рис. 13. Случайные состояния стохастической модели Калдора под действием аддитивного шума ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.01$) для $\beta = 0.6$ при $\alpha = 0.05$ (светло-серый), $\alpha = 0.8$ (черный), $\alpha = 1.95$ (темно-серый).

Будем рассматривать стохастическое равновесие на отрезке $0 < \alpha < \alpha_*$. На рис. 13 представлены стохастические равновесия системы (15) под действием только аддитивных шумом ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.001$) при $\alpha = 0.05$ (светло-серый), $\alpha = 0.8$ (черный), $\alpha = 1.95$ (темно-серый). Разброс случайных состояний не одинаков для разных значений параметров. Функция стохастической чувствительности позволяет подтвердить аналитически эти результаты прямого численного моделирования.

Чувствительность равновесия (\bar{Y}, \bar{K}) на вносимые возмущения можно охарактеризовать матрицей стохастической чувствительности $W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$. Эта матрица может быть найден непосредственно из уравнения (Прил1). На всем интервале $0 < \alpha < 2$ структурной устойчивости для собственных значений $\mu_1(\alpha), \mu_2(\alpha)$ матрицы $W(\alpha)$ для $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = \varepsilon$ графики зависимости представлены на рис.14. Эти графики отражают немонотонность отклонения, обсуждаемое выше. Для небольших α , стохастическая чувствительность

равновесия довольно большая. Когда значение параметра α увеличивается, значение функции $\mu_i(\alpha)$ убывает и достигает своего минимума. После которого растет и стремится к бесконечности вблизи точки бифуркации $\alpha_* = 2$.

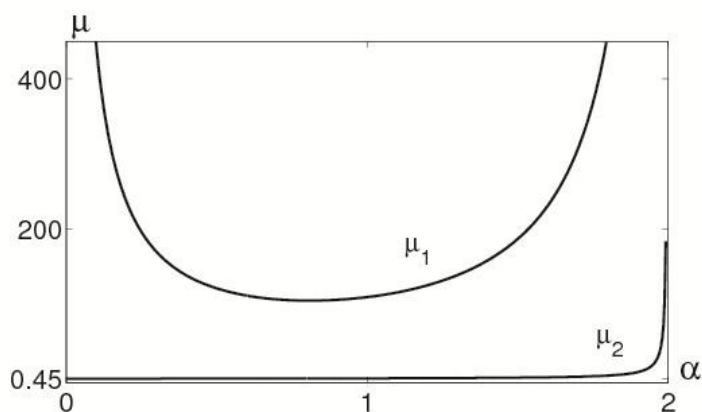


Рис. 14. График функций $\mu_1(\alpha), \mu_2(\alpha)$ для $\beta = 0.6$ при $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = \varepsilon$.

Рассмотрим теперь влияние параметрического шума. На рис. 15 представлены стохастические равновесия системы (15) под действием только параметрического шума ($\sigma_1 = 0.001, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) для тех же значений параметра $\alpha = 0.05$ (светло-серый), $\alpha = 0.8$ (черный), $\alpha = 1.95$ (темно-серый).

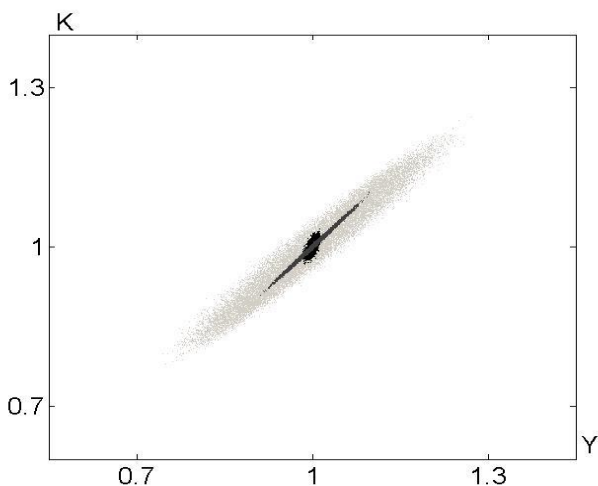


Рис. 15. Случайные состояния модели Калдора под действием параметрического шума ($\sigma_1 = 0.01, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) для $\beta = 0.6$ при $\alpha = 0.05$ (светло-серый), $\alpha = 0.8$ (черный), $\alpha = 1.95$ (темно-серый).

Графики функций $\mu_i(\alpha)$ для $\sigma_1 = \varepsilon, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ представлены на рис. 16. Видно, что в этом случае $\mu_i(\alpha)$ ведут себя одинаково.

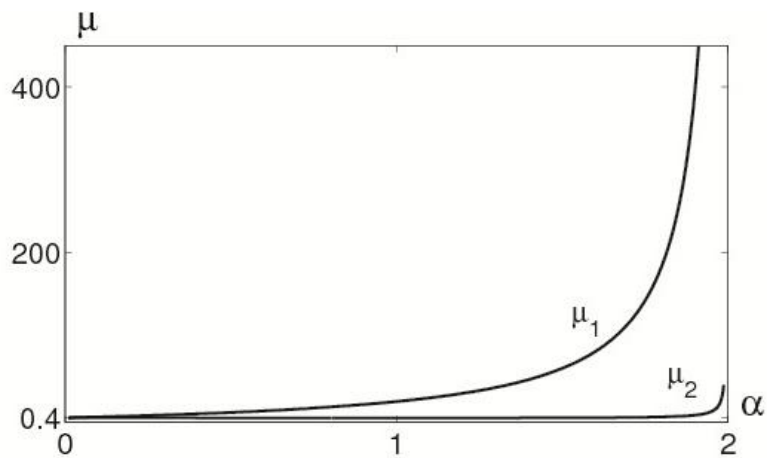


Рис. 16. Графики функций $\mu_1(\alpha), \mu_2(\alpha)$ для $\beta = 0.6$ и $\sigma_1 = \varepsilon, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Таким образом, реакция стохастической модели Калдор к аддитивным и параметрическим шума различна.

Рассмотрим стохастические циклы при $\alpha_* < \alpha$. На рис. 17а представлен стохастический цикл порожденный аддитивным шумом для $\alpha = 4, \beta = 0.6$. Отметим, что дисперсия случайных состояний вдоль детерминированного цикла неоднородна. Этот факт можно объяснить существенной вариацией значений функции стохастической чувствительности $m(t)$ на интервале периодичности (см. Рис.17б).

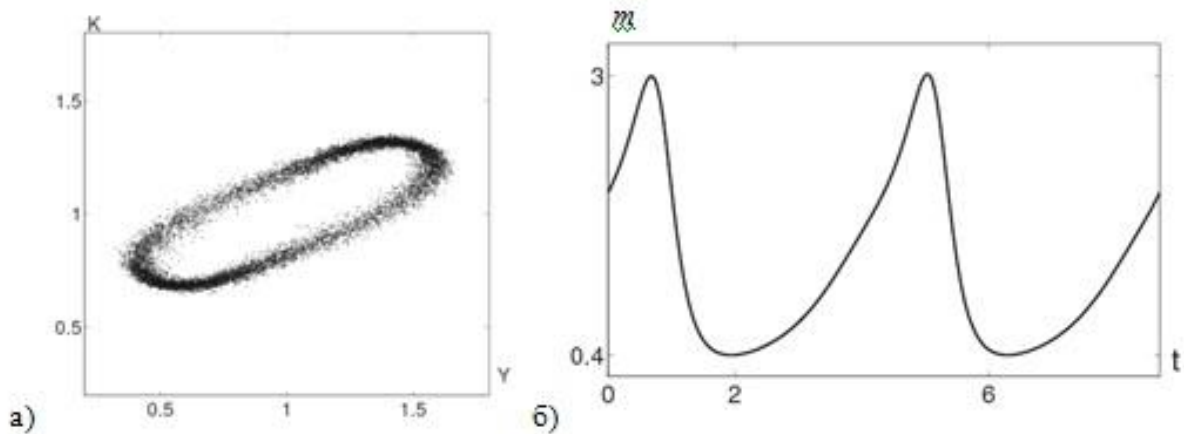


Рис. 17. Стохастический цикл модели Калдора для $\beta = 0.6, \alpha = 4$:

а) случайные состояния при $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0.02$, б) функция стохастической чувствительности $m(t)$.

Для стохастических циклов фактор стохастической чувствительности $M(\alpha)$ представлен на рис.18. Здесь для аддитивного шума $M(\alpha)$ (рис. 18а), функция монотонно стремится к нулю. Стохастическая модель Калдор с параметрическими шум ведет себя иначе

(рис.18б). График функции $M(\alpha)$ не является монотонным.

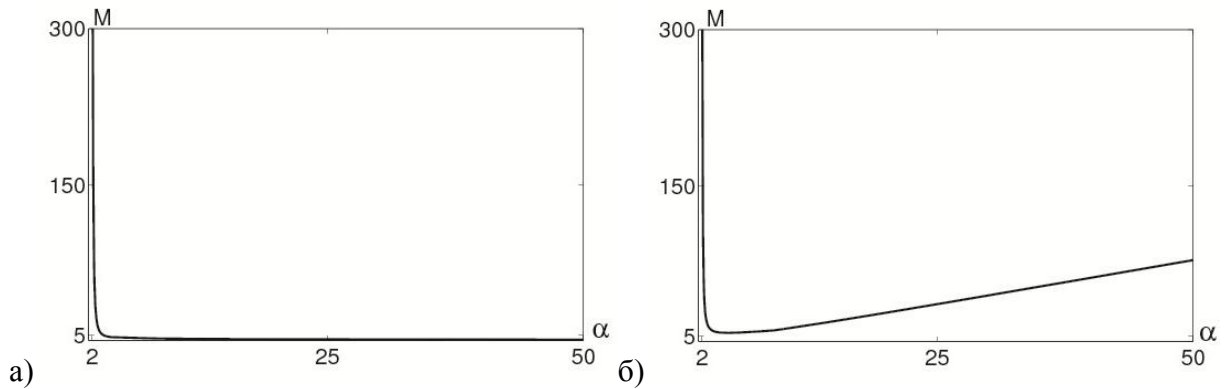


Рис. 18. Фактор стохастической чувствительности цикла $M(\alpha)$ для $\beta = 0.6$

а) с аддитивным шумом, б) с параметрическим шумом.

Интерес вызывает сравнение реакции системы Калдора к аддитивным и параметрическим шумам той же интенсивности. На рис. 19 случайные состояния цикла порожденные аддитивным шумом ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0.001$) представлены черным цветом, а для параметрического шума ($\sigma_1 = 0.001, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) - серым. Как видно, система Калдора гораздо более чувствительна к параметрическим случайным возмущениям. Действительно, малое изменение поправочного коэффициента α может привести к значительным изменениям в поведении системы.

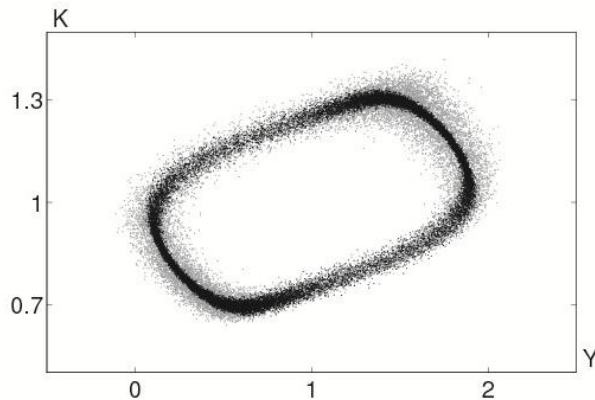


Рис. 19. Стохастические циклы модели Калдора при $\alpha = 10, \beta = 0.6$ для аддитивного шума ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0.001$) (черный) и параметрического шума ($\sigma_1 = 0.001, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) (серый).

2.4 Индуцированная шумом бистабильность модели Калдора

Шум может вызывать не только количественные изменения в модели стохастической динамики Калдор, но и качественные. Детерминированная модель Калдора моностабильно для

всех параметров α и β . Эта система имеет один аттрактор (равновесие или предельный цикл). Например, детерминированная система (14) при $\alpha = 2.2$, $\beta = 0.593$ имеет одно устойчивое равновесие. На рис. 20 представлены случайные состояния системы (15) под действием аддитивного шума ($\sigma_1 = 0$) для различных значений интенсивности: $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.01$ (черный), $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.05$ (серый).

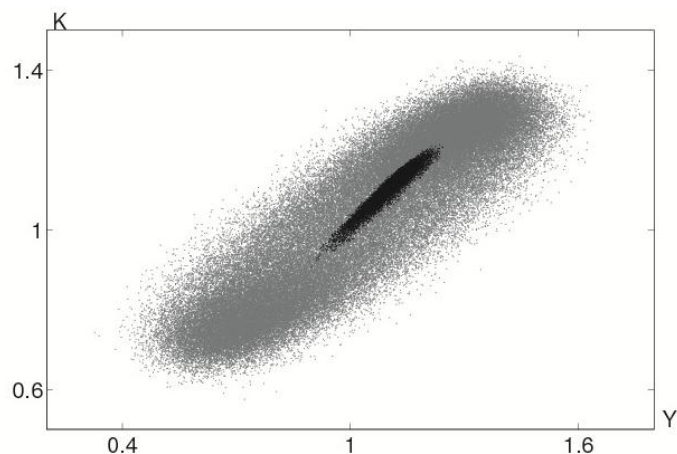


Рис. 20. Случайные состояния стохастической модели Калдора для $\alpha = 2.2$, $\beta = 0.593$, $\sigma_1 = 0$ при $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.001$ (черный) и $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.05$ (серый).

При увеличении интенсивности шума дисперсия случайных состояний увеличивается. Но наряду с этими количественными изменениями наблюдаются новые качественные деформации стационарной плотности вероятностей. Для малого шума случайные состояния сосредоточены в малой окрестности устойчивого равновесия. В этом случае, функция плотности вероятности имеет один пик (Рис.21а). При дальнейшем увеличении интенсивности шума, форма функция плотности вероятности качественно меняется от унимодальной к бимодальной. Действительно, для $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.05$, случайные состояния сосредоточены в двух зонах фазовой плоскости и соответствующая функции плотности вероятности имеет два пика (Рис. 21б).

В модели Калдора наблюдается стохастическая бифуркация (Арнольд (1998)). На рис.22 представлены временные ряды дохода Y и капитала K , построенные для унимодального и бимодального режимов стохастической модели Калдора. В унимодальном режиме, случайные состояния переменных Y и K колеблются около равновесных значений \bar{Y} , \bar{K} (Рис.22а). В бистабильном режима, реакция Y и K на случайные возмущения совершенно иная. Здесь капитал K случайно колеблется с достаточно большим разбросом в то время как доходы Y

проявляет случайные скачки между двумя определенными случайными состояниями.

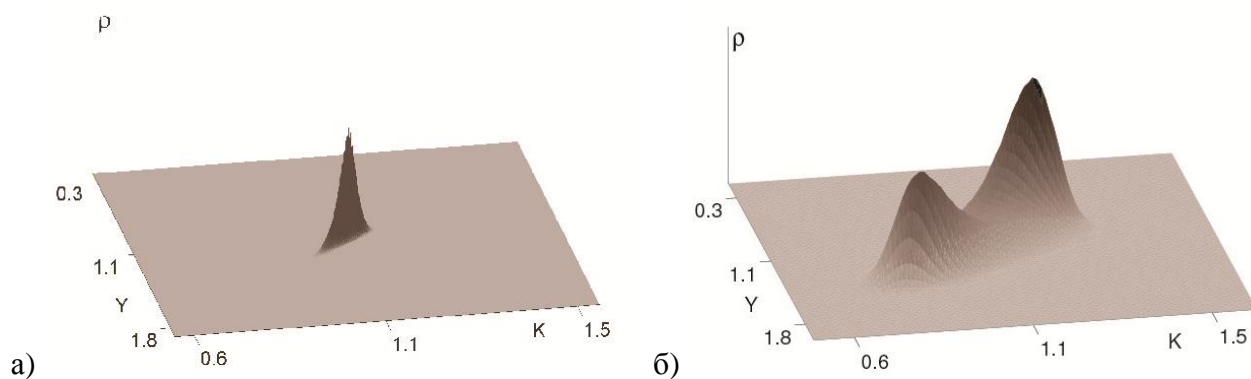


Рис. 21. Функция плотности распределения для случайных состояний стохастической модели Калдора для $\alpha = 2.2, \beta = 0.593, \sigma_1 = 0$: а) унимодальный режим при $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.001$; б) бимодальный режим при $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.05$.

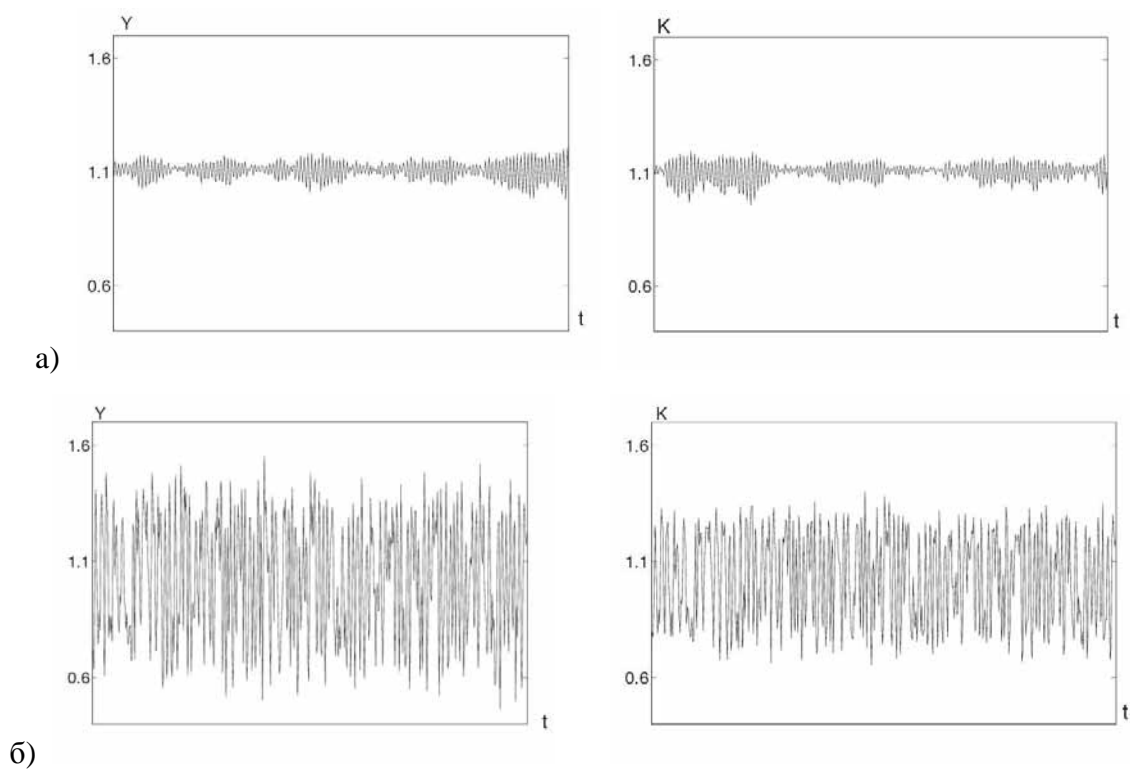


Рис. 22. Временные ряды стохастической модели Калдора для $\alpha = 2.2, \beta = 0.593, \sigma_1 = 0$ при а) $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.001$; б) $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.05$.

Это явление может быть классифицировано как индуцированная шумом бистабильность. Один пик функции плотности вероятности соответствует устойчивому равновесию детерминированной системы, второй пик не имеет детерминированного аналога. Таким образом, эта простая двумерная модель демонстрирует возникновение новых динамических режимов в нелинейной экономике под действием случайных возмущений, которые не могут быть объяснены детерминированной теорией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе был проведен полный параметрический анализ аттракторов модели бизнес-циклов и Калдора.

1. В детерминированной модели бизнес – циклов была численно найдена кривая, отражающая исчезновение неустойчивого цикла, которая была аналитически выведена из теории усреднения Ван-дер-Поля.
2. Аналитически была посчитана функция стохастической чувствительности для равновесий и численно для цикла (модель бизнес-циклов, модель Калдора).
3. Для исследования мультипликативного шума была аналитически получена матрица вторых моментов, задающая дисперсию отклонений (продемонстрировано на примере модели бизнес-циклов).
4. Подробно изучены стохастические аттракторы моделей, основываясь на прямом численном моделировании и применение аппарата функции стохастической чувствительности для анализа отклика аттракторов системы на вносимые случайные возмущения (модель бизнес-циклов, модель Калдора).
5. Используя технику функции стохастической чувствительности и матрицы вторых моментов, были построены доверительные области для конструктивного геометрического описания вероятностно-пространственного распределения случайных состояний стохастических аттракторов (продемонстрировано на примере модели бизнес-циклов).
6. Обнаружен и исследован эффект генерация стохастического цикла (модель Калдора).
7. Для реализации исследований доработан программный комплекс необходимыми алгоритмы.

Список используемых источников

1. Kaldor N (1940) A model of the trade cycle. *Econ J* 50: 78–92.
2. Chang WW, Smyth DJ (1971) The existence and persistence of cycles in a nonlinear model: Kaldor's 1940 model re-examined. *Rev Econ Stud* 38: 37–44.
3. Lorenz HW (1993) *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*. Springer, Berlin
4. Gandolfo G (1997) *Economic Dynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York
5. Krawiec A, Szydłowski M (2000) The Hopf bifurcation in the Kaldor-Kalecki model, in: *Computation in Economics, Finance and Engineering: Economic Systems*, S. Holly, S. Greenblatt (Eds.), Elsevier, pp.391-396.
6. Kaddar A, Talibi Alaoui H (2008) Hopf bifurcation analysis in a delayed Kaldor-Kalecki model of business cycle. *Nonlinear Anal Model Control* 13(4): 439-449.
7. Kaddar A, Talibi Alaoui H (2009) Global Existence of Periodic Solutions in a Delayed Kaldor-Kalecki Model. *Nonlinear Anal Model Control* 14(4): 463-472.
8. Wu XP, Wang L (2010) Multi-parameter bifurcation of the Kaldor-Kalecki model of cycles with delay. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 11: 869-887.
9. Bischi GI, Dieci R, Rodano G, Saltari E (2001) Multiple attractors and global bifurcations in a Kaldor-type business cycle model. *Evaluationary Economics* 11: 527-554.
10. Dobrescu LI, Opris D (2009) Neimark–Sacker bifurcation for the discrete-delay Kaldor model. *Chaos Solitons and Fractals* 40: 2462-2468.
11. Wegener M, Westerhoff F (2012) Evolutionary Competition Between Prediction Rules and the Emergence of Business Cycles within Metzler's Inventory Model. *J Evol Econ* 22: 251-273.
12. Kim C, Wong K-C (2011) Evolution of Walrasian equilibrium in an exchange economy. *J Evol Econ* 21: 619-647.
13. Horsthemke W, Lefever R (1984) *Noise-Induced Transitions*. Springer, Berlin
14. Arnold L (1998) *Random dynamical systems*. Springer-Verlag
15. Gao JB, Hwang SK, Liu JM (1999) When can noise induce chaos? *Phys Rev Lett* 82: 1132-1135.
16. Huang D, Wang H, Yi Y (2010) Bifurcations in a stochastic business cycle model. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 20(12): 4111-4118.
17. Mircea G, Neamtu M, Opris D (2011) The Kaldor-Kalecki stochastic model of business cycle. *Nonlinear Anal Model Control* 16(2): 191-205.

18. Freidlin MI, Wentzell AD (1984) Random perturbations of dynamical systems. Springer, New York
19. Bashkirtseva IA, Ryashko LB (2000) Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator. *Physica A* 278: 126-139.
20. Bashkirtseva IA, Ryashko LB (2004) Stochastic sensitivity of 3D-cycles. *Math and Comput in Simul* 66: 55-67.
21. Samuelson, P. A. (1939) "Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration," *Rev. Economic Stat.* 21 75–78.
22. Hicks, J. R. (1950) *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle* (Oxford University Press).
23. Puu, T., Sushko, I. (2004) "A business cycle model with cubic nonlinearity," *Chaos Solitons and Fractals* 19 597–612.
24. J.Xu, H.Wang, G.Ge (2008) Hopf bifurcation of the stochastic model on business cycle. *Journal of Physics: Conference Series* 96.
25. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. (2002) Нелинейные колебания. Современная теория колебаний и волн. 2002. С. 146-148.
26. Irina Bashkirtseva. Approximation of Stochastic Equilibria for Dynamical Systems with Parametrical Noise (отправлено в печать).
27. Rodano G (1997) *Lezioni Sulle Teorie Della Crescita e Sulle Teorie del Ciclo*, Department of Economic Theory and Quantitative Methods, La Sapienza, University of Rome
28. Krawiec A, Szydlowski M (2005) The stability problem in the Kaldor-Kalecki business cycle model. *Chaos Solitons and Fract* 25: 299–305.
29. Wu XP (2011) Codimension-2 bifurcations of the Kaldor model of business cycle. *Chaos Solitons and Fractals* 44(1-3): 28-42.
30. Bashkirtseva I. A., Ryashko L.B. Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator. *Physica A* – 2000. – V. 278. – P. 126–239.
31. Bashkirtseva I, Ryashko L (2011a) Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect. *Chaos* 21: 047514.
32. Ryashko L., Bashkirtseva I. (2011b) Stochastic sensitivity analysis of noise-induced excitement in a prey-predator plankton system. *Frontiers in Life Science*. 2011. Vol.5 P. 141-148

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Функция стохастической чувствительности

В результате действия шумов случайные траектории системы покидают детерминированный аттрактор и формируют некоторый стохастический аттрактор со стационарным распределением $\rho(x, \varepsilon)$. Функция $\rho(x, \varepsilon)$ удовлетворяет стационарному уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК). Непосредственное использование этого уравнения уже для двумерных систем является технически трудной задачей. В этих обстоятельствах, широко используются методики, основанные на функции квазипотенциала

$$v(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \rho(x, \varepsilon).$$

Квазипотенциал связан с некоторой вариационной задачей минимизации функционала действия и удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби. Уравнение Гамильтона–Якоби выглядит проще, чем стационарное уравнение, однако и его точное решение является весьма сложной задачей. В работах Ряшко Л.Б., Башкирцевой И.А. (2000) был предложен конструктивный подход, связанный с введением еще одной асимптотики в малой окрестности исследуемого аттрактора.

Было доказано, что положительно определенная матрица W – матрица стохастической чувствительности – является решением алгебраического уравнения

$$FW + WF^T = -S, \quad (\text{Прил1})$$

где $F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$, $S = GG^T$, $G = \sigma(\bar{x})$.

Эта матрица характеризует разброс случайных траекторий системы вокруг равновесия \bar{x} .

В случае цикла на плоскости матрицы $W(t)$ и $P(t)$ имеют ранг, равный единице, и представимы в виде

$$W(t) = m(t)P(t), \quad P(t) = p(t)p^T(t).$$

Здесь $p(t)$ – нормированный вектор, ортогональный касательному вектору $f(\zeta(t))$, а $m(t) > 0$ – T -периодическая скалярная функция, задающая разброс (дисперсию) пучка по нормали к циклу. Функция $m(t)$ удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{cases} \dot{m} = a(t)m + b(t) \\ m(0) = m(T) \end{cases} \quad (\text{Прил2})$$

с T -периодическими коэффициентами

$$a(t) = p^T(t)(F^T(t) + F(t))p(t), \quad b(t) = p^T(t)S(t)p(t).$$

Функция $m(t)$ определяет локальную стохастическую чувствительность цикла в точке $\xi(t)$. Удобной характеристикой стохастического цикла в целом является коэффициент стохастической чувствительности $M = \max m(t)$, где $0 < t < T$.

Построение доверительных областей

Опираясь на найденную функцию чувствительности можно построить эллипсы рассеивания – для равновесия (Ряшко Л.Б., Башкирцева И.А. (2011а)) и доверительные полосы – для цикла (Ряшко Л.Б., Башкирцева И.А. (2011б)). Этот аппарат позволяет построить область, в которую с заданной вероятностью попадут случайные состояния. Для построения эллипсов рассеивания используются следующие формулы

$$x = \bar{x} + \frac{z_1 V_{22} - z_2 V_{12}}{\Delta},$$

$$y = \bar{y} + \frac{z_2 V_{11} - z_1 V_{21}}{\Delta},$$

где $z_1(\varphi) = \sqrt{2\lambda_1} \varepsilon k \cos \varphi$, $z_2(\varphi) = \sqrt{2\lambda_2} \varepsilon k \sin \varphi$, $k^2 = -\ln(1 - P)$,

Δ – определитель матрицы, составленной из собственных векторов матрицы W .

Доверительные полосы строятся по следующим формулам

$$x_{1,2} = \xi(t) \pm k\varepsilon \sqrt{2\mu(t)} p(t),$$

где $k = \text{erf}^{-1}(P)$, $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Список публикаций по теме исследования

№ п/ п	Наименование работы, ее вид	Форма работы	Выходные данные	Объем в п.л. или с.	Соавторы
1.	Метод функций стохастической чувствительности в анализе модели бизнес-циклов (тезисы)	печ.	XVI International Conference «Dynamical system modelling and stability investigation», Kiev, Ukraine, May 29-31, 2013., С.223	<u>1 с.</u>	Екатеринчук Е.Д.
2.	Компьютерное моделирование и анализ стохастической динамики модели Гудвина (тезисы)	печ.	Международная научно-техническая конференция «Компьютерное моделирование 2013 (КОМОД 2013)», Санкт – Петербург, Россия, Июль 3-5, С. 233-238	<u>6 с.</u>	Екатеринчук Е.Д.
3.	Method of confidential domains in the analysis of noise-induced transitions for Goodwin model (тезисы)	печ.	International conference "Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors" dedicated to the memory of L.P.Shilnikov, Nizhni Novgorod, July 1-5, 2013, p 11-12	<u>1 с.</u>	Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.
4.	Анализ стохастических аттракторов модели экономической динамики (статья в сборнике конференции)	печ.	III междисциплинарная молодежная научная конференция УрО РАН «Информационная школа молодого ученого», Екатеринбург, 26-30 августа 2013г, с. 317-323	<u>7 с.</u>	Екатеринчук Е.Д.
5.	Индукцированные шумом переходы в модели бизнес-циклов Гудвина (статья направлена в печать)	печ.	Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление.	<u>15 с.</u>	Екатеринчук Е.Д., Ряшко Л.Б.
6.	The stochastic sensitivity of the Kaldor's model (статья подготовлена для отправки в журнал)	печ.	Journal of Economic Dynamics and Control	<u>23 с.</u>	Bashkirtseva I.A., Radi D., Ryashko L.B.